# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Pablo José Gerlach Mena

gerlach@us.es

Las mates de Gerlachito

https://www.youtube.com/channel/UCIxtuOawscfjTAuKRIat6SA

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

$|5|=5$

$|-7|=7$

$|0|=0$

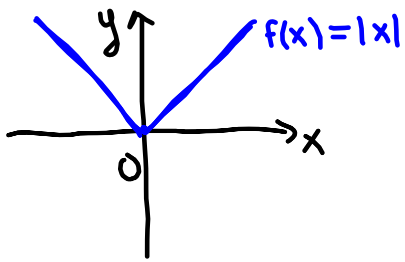
Vamos a definir la función valor absoluto $f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,+\infty)$:

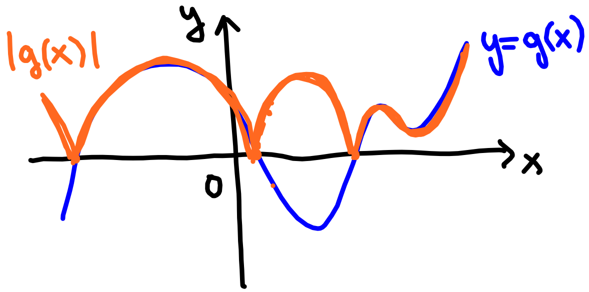
$$F(x)=|x|:=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Podemos cambiar el argumento y considerar de forma general:

$$|g(x)|=\begin{cases} g(x) & \text{si } g(x)\geq 0 \\ -g(x) & \text{si } g(x)<0 \end{cases}$$

Geométricamente:



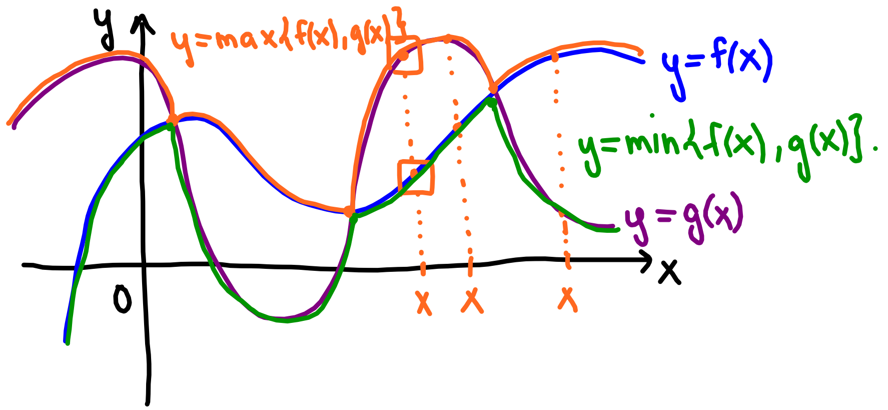



Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Sabemos cálcular máximos y mínimos de números, pero ¿cómo podemos hacerlo para funciones? Es decir, si tenemos $f(x), g(x)$ son dos funciones, queremos hallar:

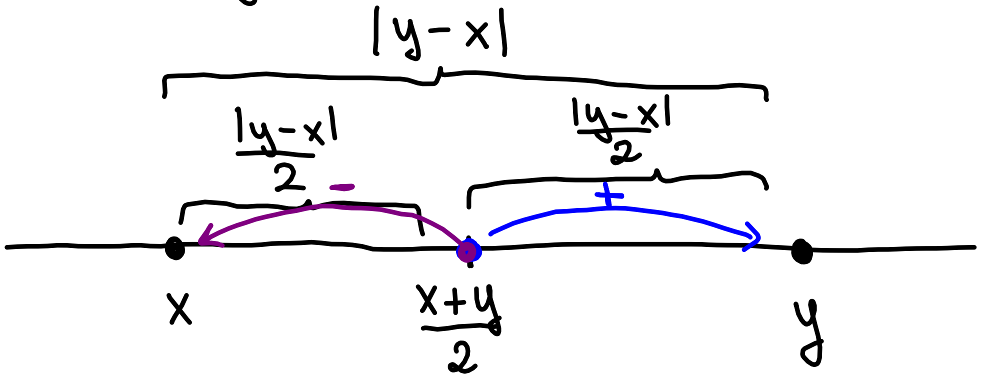
$\max\{f(x), g(x)\} = ¿?$

$\min\{f(x), g(x)\}. = ¿?$



Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Para dar una fórmula del màximo y mínimo vamos a pensar en el caso sencillo de números: $x, y \in \mathbb{R}$:




$\max\{x,y\} = y$ (porque hemos elegido $y > x$)
$\min\{x,y\} = x$

$$\max\{x,y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|y-x|}{2}$$

$$\min\{x,y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|y-x|}{2}$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

De este modo podemos calcular también:

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tales que:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

- $f$ es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Observamos que $f(n) \equiv 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es una solución (función) que verifica las condiciones del ejercicio.

Vamos a ver que cualquier función $f$ que verifique las condiciones del ejercicio también debe verificar las siguientes:

(1) $f$ no es constante ni acotada.

(2) $f$ no es estrictamente creciente (i.e. $f(n) \not> f(m)$ si $n > m$).

## Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tales que:

- $f$ es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

De ahora en adelante vamos a considerar que $f(n) \not\equiv 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $\exists a \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) \neq 0$.

Entonces:

$$f(a^n) = f(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot a}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(a) + f(a) + f(a) + \cdots + f(a)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{f(a)}_{\neq 0} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ no puede ser constante.} \\ f \text{ no está acotada.} \end{cases}$$

$\boxtimes$

## Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tales que:

- $f$ es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Observemos que:

$$\underbrace{f(1\cdot 1)}_{f(1)} = f(1) + f(1) \Longrightarrow f(1) = 0$$

Tomamos ahora $2,3 \in \mathbb{N}$. Tenemos las siguientes opciones:

(1) Si $f(2) = f(3)$: Ya hemos terminado porque $3 > 2$ pero $f(3) \not> f(2)$. $\boxed{\emptyset}$

(2) Si $f(2) \neq f(3)$: Llamamos $a := f(2)$, $b := f(3)$. $(b > a)$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} f(2^b) &= b\cdot f(2) = b\cdot a = a\cdot b \\ f(3^a) &= a\cdot f(3) = a\cdot b \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{Tenemos que } 2^b \neq 3^a \text{ pero } f(2^b) = f(3^a).$$

$\boxed{\emptyset}$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tales que:

- $\boxed{f \text{ es creciente}}$, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Hasta ahora hemos visto que si $f$ es una función con $f(n) \not\equiv 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ solución:

- $f$ no acotada
- $f$ no constante
- $f$ no estrictamente creciente.

De este último hecho deducimos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f(m) = f(m+1) =: k < f(m+2)$$

Entonces estudiamos:

$$\left.\begin{array}{l} f\left((m+1)^2\right) = 2f(m+1) = 2k \\ f(m(m+2)) = f(m) + f(m+2) = k + f(m+2) > k + k = 2k \end{array}\right\} \Longrightarrow f\left((m+1)^2\right) < f(m(m+2))$$

Sin embargo:

$$\left.\begin{array}{l} (m+1)^2 = m^2 + 2m \boxed{+1} \\ m(m+2) = m^2 + 2m \end{array}\right\} \Longrightarrow (m+1)^2 > m(m+2)$$

!!!
...

$$\boxed{\text{La única solución es } f(n) \equiv 0 \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

## Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tales que:

- $f$ es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(2) = 2$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Con éstas condiciones la única solución era $f(n) \equiv 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $f(2) = 2 \neq 0$, entonces no hay ninguna solución de este problema.

Podemos ver de forma sencilla que:

$f(0) = 0$

$f(1) = 0$

$f(2) = 2$

¿ $f(3) = ?$

$f(4) = f(2^2) = 2f(2) = 2 \cdot 2 = 4$

$f(a^n) = n f(a)$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tales que:

- $f$ es creciente, es decir, $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$,
- $f(2) = 2$,
- $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Como $f(2)=2$ y $f(4)=4$, tenemos que:

$f(3) \in \{2,3,4\}$

Vamos a analizar cada caso por separado:

(1) Si $f(3)=2$: Entonces $\underbrace{2^3}_{8} < \underbrace{3^2}_{9}$ pero $f(2^3)=3f(2)=6 \nleq 4 = 2f(3) = f(3^2)$ !!!

(2) Si $f(3)=3$: Entonces $2^{11} < 3^7$ pero $f(2^{11}) = 11f(2) = 22 \nleq 21 = 7f(3) = f(3^7)$ !!!

(3) Si $f(3)=4$: Entonces $\underbrace{3^3}_{27} < \underbrace{2^5}_{32}$ pero $f(3^3) = 3f(3) = 12 \nleq 10 = 5f(2) = f(2^5)$ !!!

Entonces no hay solución del problema.

## Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen:

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Veamos qué ocurre cuando reescribimos la ecuación original:

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)} \iff x - f(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} \iff \boxed{x - f(x)} = \frac{\boxed{x - f(x)}}{x \cdot f(x)} \iff$$

$$\iff \boxed{x - f(x)} \cdot 1 - \left(\boxed{x - f(x)}\right) \cdot \frac{1}{x f(x)} = 0 \iff (x - f(x)) \cdot \left(1 - \frac{1}{x f(x)}\right) = 0 \iff \begin{cases} x - f(x) = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x f(x)} = 0 \end{cases}$$

Obtenemos:

$$f(x) = x$$

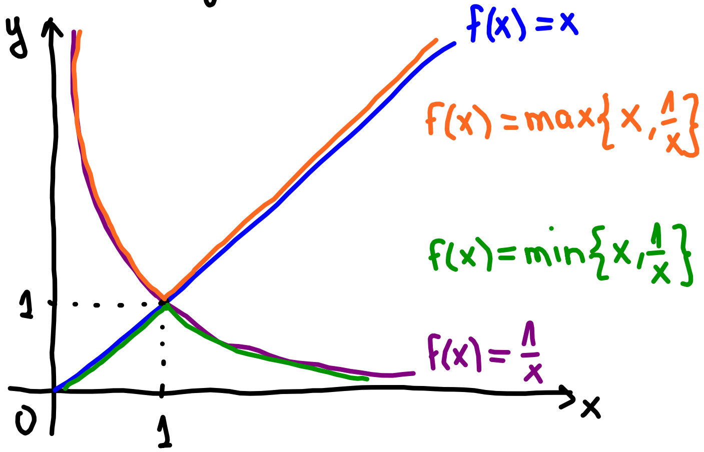
$$\frac{1}{x f(x)} = 1 \iff f(x) = \frac{1}{x}$$

Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Hallar todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen:

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Podemos dibujarlas:




De momento hemos obtenido dos soluciones de la ecuación:

$f(x) = x$

$f(x) = \frac{1}{x}$

Resulta que las funciones $\max\{x, \frac{1}{x}\}$ y $\min\{x, \frac{1}{x}\}$ también verifican la ecuación del enunciado:

$$f(x) = \max\{x, 1/x\} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} + \frac{\left|x - \frac{1}{x}\right|}{2}$$

$$f(x) = \min\{x, 1/x\} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} - \frac{\left|x - \frac{1}{x}\right|}{2}$$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones reales $f$, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x+f(x+y)) = f(2x)+y$$

cualesquiera sean $x, y$ reales.

Comenzamos evaluando en $x=f(0), y=-f(0)$:

$$\underbrace{f(f(0)+f(\underbrace{f(0)-f(0)}_{0}))}_{f(\cancel{2f(0)})} = f(\cancel{2f(0)})-f(0) \Longrightarrow \boxed{f(0)=0}$$

A continuación hacemos $x=0$ en la ecuación original:

$$f(0+\underbrace{f(0+y)}_{f(y)}) = \underbrace{f(2\cdot 0)}_{f(0)=0}+y \Longrightarrow \boxed{f(f(y))=y. \quad \forall y\in\mathbb{R}}$$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Encontrar todas las funciones reales $f$, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y$$

cualesquiera sean $x, y$ reales.

De momento sabemos que:

$f(0)=0$

$\boxed{f(f(y))=y}$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

Si hacemos $y=0$ en la ecuación original:

$$f(x+f(x+0)) = f(2x)+0 \iff f(x+f(x)) = f(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si volvemos a aplicar $f$ a ambos lados de la igualdad anterior:

$$f(f(\boxed{x+f(x)})) = f(f(\boxed{2x})) \implies x+f(x)=2x \iff \boxed{f(x)=x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Comprobamos que $f(x)=x$ verifica la ecuación original:

$$f(x+f(x+y)) = f(x+x+y) = x+x+y = \boxed{2x+y}$$

$$f(2x)+y = \boxed{2x+y}$$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Claramente si $P(x) \equiv 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ se verifica la ecuación funcional.

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

Queremos ver si hay más polinomios que cumplan la ecuación. Comenzamos viendo si con $k=1$ hay algún polinomio $P \not\equiv 0$ tal que:

$$\underbrace{\underbrace{P(x^1)}_{P(x)} - \underbrace{P(1 \cdot x)}_{P(x)}}_{0} = x^1 \cdot P(x) \Longrightarrow P(x) \not\equiv 0 \ !!!$$

## Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

Hacemos ahora $k \geq 2$. y supongamos que $P(x) \equiv C$ constante. Entonces:

$$\underbrace{C - C}_{0} = x^k \cdot C \Longrightarrow C = 0 \; !!!$$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número $\boxed{\text{natural } k \geq 1}$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

$n :=$ grado del polinomio $P(x)$.

Veamos si para $k \geq 2$ podemos encontrar polinomios $P$ no constantes. Entonces:

$$\boxed{\boxed{P(x^k)} - \boxed{P(kx)}} = \boxed{x^k \cdot P(x)} \longrightarrow \underbrace{a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \cdots + a_n x^{k+n}}_{\text{Grado } n+k}$$

$$\underbrace{a_0 + a_1 x^k + a_2 x^{2k} + \cdots + a_n x^{nk}}_{\text{Grado } n \cdot k} \qquad \underbrace{a_0 + a_1 k x + a_2 k^2 x^2 + \cdots + a_n k^n x^n}_{\text{Grado } n}$$

Como $k \geq 2 > 1$, entonces $nk > n$, por lo que $P(x^k) - P(kx)$ tiene grado $n \cdot k$

Debe ser:

$n \cdot k = k + n$ ; $nk - k = n$ ;

$k(n-1) = n$ ; $k = \frac{n}{n-1}$ ;

$k = 1 + \frac{1}{n-1} \in \mathbb{N} \iff \boxed{n=2}$ $\boxed{k=2}$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$\underbrace{P(x^k) - P(kx)}_{} = x^k P(x)$$

para todo $\boxed{\text{valor } x \in \mathbb{R}.}$

Ahora sabemos que debe ser:

$k=2, n=2$:

$$P(x^2)-P(2x)=x^2P(x) \qquad P(x)=ax^2+bx+c.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que:

$$\cancel{ax^4}+\underbrace{bx^2}+\cancel{c}-\underbrace{4ax^2}\underbrace{-2bx}-\cancel{c}=\cancel{ax^4}+bx^3+cx^2 \iff$$

$$\iff (b-4a)x^2-2bx=bx^3+cx^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x^3:\ 0=b \\ x^2:\ b-4a=c \\ x^1:\ -2b=0 \\ x^0:\ \quad 0=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow b=0,\ c=-4a \Longrightarrow P(x)=\boxed{a}x^2+0\cdot x-4\boxed{a}=a(x^2-4) \quad a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

# Sesión 23 Abril 2021 - Ecuaciones Funcionales

Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

Hemos obtenido que las soluciones son:

- Si $k \geq 1$: $P(x) \equiv 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- Si $k = 2$: $P(x) = a(x^2 - 4)$, $a \neq 0$ (soluciones aparte de $P(x) \equiv 0$).